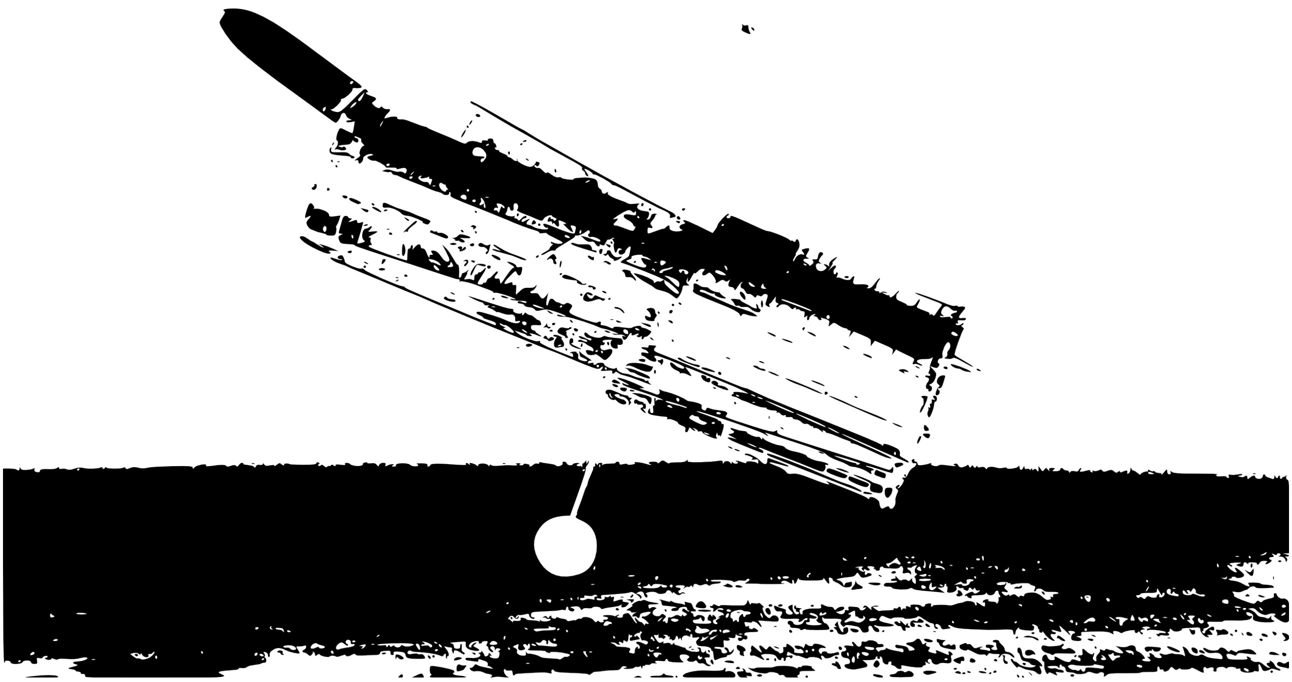
Introduction au vol spatial

Cours II
Trajectoire du satellite

Humor is the only test of gravity, and gravity of humor;
for a subject which will not bear raillery is suspicious,
and a jest which will not bear serious examination is false wit.

Aristotle



v2.0

 Olivier Cleynen

Introduction

Un vol spatial n'est pas envisageable sans les paramètres de vol (altitude, vitesse) soient définis pour se placer, sous le seul effet de la pesanteur, sur la trajectoire désirée.

Le *Cours II : Trajectoire du satellite* a pour objectif de répondre à deux questions :

- Comment varie la gravité autour d'un astre, et comment la quantifier ?
- À quoi ressemble la trajectoire d'un corps qui n'est soumis qu'à la force de pesanteur ?

1. Gravité et pesanteur

a) La force d'attraction gravitationnelle

Nous devons à Isaac Newton cette superbe expression de la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 :

$$F = G \frac{m_1 \, m_2}{r^2} \tag{II-1.1}$$

où F est la force gravitationnelle (N),
m_1 et m_2 sont les masses des deux objets (kg),
r est la distance séparant les deux corps (m),
et G est une constante universelle de valeur très faible (N.m^2.kg^{-2})

Cette force est réciproque et s'applique de façon instantanée ; elle s'applique quelque soient les conditions du milieu (présence d'autres masses, de champ magnétique ou autre). Elle reste encore de nos jours bien difficile à expliquer véritablement.

Lorsque nous considérons la force gravitationnelle de la Terre, F est le poids P, la masse m_1 est celle de notre planète, m_T, et et nous ré-exprimons l'équation (II-1.1) de la façon suivante :

$$P_{(r)} = \frac{G\ m_T}{r^2}\ m_{objet}$$

$$P_{(r)} = g_{(r)}\ m_{objet} \qquad \text{(II-1.2)}$$

où $g_{(r)} \equiv G m_T / r^2$ est mesuré en m.s^{-2} et varie avec le rayon r.

Le coefficient $g_{(r)}$ est une accélération ; c'est celle que prendra un corps en chute libre à cet endroit.

Les corps sphériques homogènes, notamment par approximation la Terre, exercent la même force gravitationnelle qu'un corps ponctuel de même masse placé à leur centre de gravité. En d'autres termes, il est possible de modéliser la force gravitationnelle d'une planète sans tenir compte de son volume.

b) À la surface terrestre

Si nous restons à la surface terrestre, le rayon est fixe (nous le nommons R_T) et l'accélération due à la pesanteur prend une valeur précise que nous nommons $g_{0,T}$:

$$g_{0,T} \equiv \frac{G\ m_T}{R_T^2} = 9{,}825\ \text{m.s}^{-2} \qquad \text{(II-1.3)}$$

$$P_{surface} = g_{0,T}\ m_{objet} \qquad \text{(II-1.4)}$$

En réalité $g_{0,T}$ varie peu, mais significativement, en fonction de la latitude, du fait de la forme de la Terre, aplatie aux pôles.
De plus, la Terre tourne sur elle-même : une personne immobile à sa surface tourne autour de l'axe de rotation de la planète. Cette personne subit donc une accélération dirigée vers son centre (I-4.8), qui viendra fausser toute mesure de l'accélération due à la gravité. Cet écart entre la valeur de $g_{0,T}$ et l'accélération que l'on mesure à la surface est d'autant plus grand que l'on s'approche de l'équateur, où l'éloignement à l'axe de rotation est le plus grand.

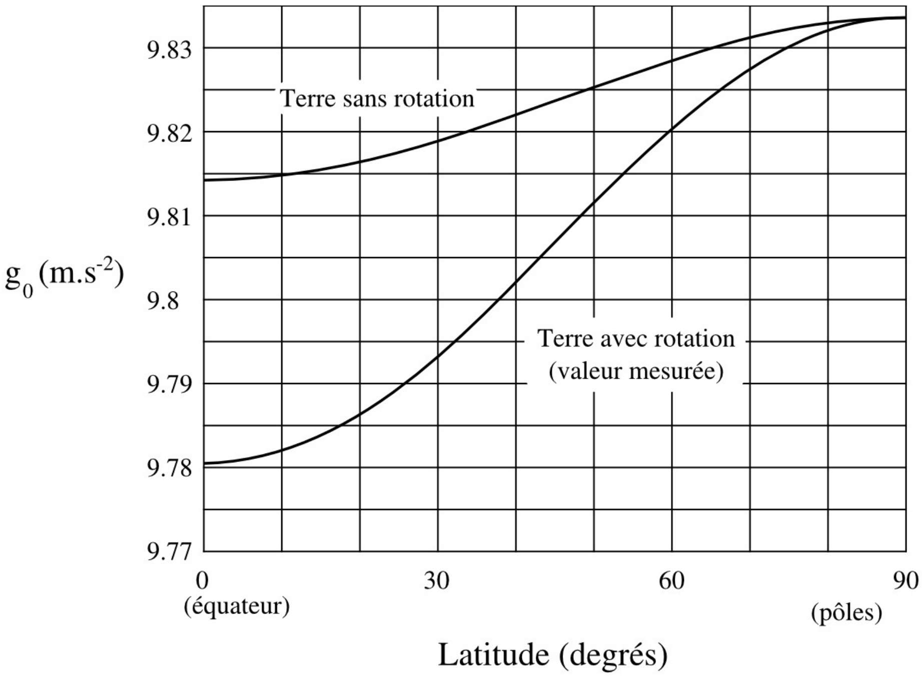


Figure 1.1
Valeur (standardisée) de g_{0T}, en fonction de la latitude

c) Prévoir la gravité en tout point

Lorsque l'altitude des corps étudiés est grande, par exemple dans le cas de lanceurs spatiaux, la valeur de g dévie fortement de sa valeur au sol. Nous exprimons souvent le poids de l'objet en fonction de la valeur de g au sol :

$$P_{(r)} = g_{0,T} \frac{R_T^2}{r^2} m_{objet}$$

où $g_{0,T}$ est la valeur de $g_{(r)}$ à la surface Terrestre (m.s^{-2}, constante),
R_T est le rayon de la surface terrestre (m, constant),
et r est le rayon local (m).

Pour simplifier les saisies de données, on définit le *paramètre gravitationnel* μ_T, constante dépendant seulement de l'astre considéré :

$$\mu_T \equiv g_{0,T} R_T^2 \qquad \text{(II-1.5)}$$

$$P_{(r)} = \frac{\mu_T}{r^2} m_{objet} \qquad \text{(II-1.6)}$$

Nous généraliserons ces relations et définitions pour les appliquer à n'importe quel corps sphérique homogène (la Terre et la Lune, par exemple[1]). L'ensemble se résume alors avec l'expression suivante :

$$g_{(r)} = g_{0,A}\frac{R_A^2}{r^2} = \frac{\mu_A}{r^2} \qquad \text{(II-1.7)}$$

où l'indice A indique une valeur constante spécifique à l'astre « A ».

d) L'impesanteur

Tout corps dont l'accélération est égale à celle que provoque la gravité en sa position est en état d'*impesanteur* (que l'on appelle fréquemment *apesanteur*). C'est le cas de n'importe quel corps en chute libre.

Plusieurs aéronefs, dont l'Airbus *Zéro-G* [2]du CNES, obtiennent cette accélération en suivant des trajectoires paraboliques particulières. Plus modestement, il suffit d'un trampoline, d'un tremplin ou d'un *half-pipe* de surfeur pour obtenir une telle trajectoire. Dès que le sol est quitté, et quelle que soit sa vitesse et sa direction, le sujet est en impesanteur : la seule force qui s'exerce sur lui ou elle est la pesanteur.

1 L'homogénéité de la densité des astres est une approximation, fort raisonnable dans le cadre de nos bureaux d'études, mais que l'on abandonnera dès la porte d'entrée d'une agence spatiale franchie.

2 Mal nommé, cet appareil ne permet pas d'atteindre " $g = 0$ " (zéro gravité) mais bien seulement " $P = 0$ " (zéro pesanteur). « *Zéro-P* » conviendrait mieux, même si la phonétique est moins attrayante.

2. Trajectoire orbitale

Dans le *cours I : éléments de balistique*, nous avons étudié des trajectoires de chute libre lorsque le rayon variait peu.

Nous allons désormais généraliser ces trajectoires pour les cas où le rayon varie significativement, et avec lui l'accélération due à la gravité.

a) Corps en chute libre

Résumons les résultats du cours précédent. Nous avons vu que l'accélération d'un corps sur n'importe quelle trajectoire pouvait s'exprimer en deux composantes de norme :

$$a_r = \ddot{r} - \frac{v_\perp^2}{r} \tag{I-4.2}$$

$$a_\perp = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(r\ v_\perp\right) \tag{I-4.3}$$

Lorsque le mouvement est un mouvement de chute libre, la seconde loi Newton nous avait permis de poser deux conditions pour prévoir la trajectoire :

$$-\frac{P}{m} = \ddot{r} - \frac{v_\perp^2}{r} = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \tag{I-4.4}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(r\ v_\perp\right) = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(r^2\,\dot{\theta}\right) \tag{I-4.5}$$

Cette fois, nous allons tenir compte de la variation du poids P avec l'altitude. En insérant l'expression (II-1.6) dans l'équation (I-4.4), nous obtenons :

$$-\frac{\mu_A}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(r^2\,\dot{\theta}\right)$$

En définissant *le moment angulaire* h

$$h \equiv r^2 \dot{\theta} = r \, v_{\perp} \tag{II-2.3}$$

et en ré-organisant les termes du couple plus haut, nous obtenons :

$$r^2 \ddot{r} - r^3 \dot{\theta}^2 = -\mu_A \tag{II-2.4}$$

$$h = cst \tag{II-2.5}$$

Cette paire d'équations (II-2.4/5) suffit pour décrire le mouvement de n'importe quel mouvement de chute libre, quelque soit la variation d'altitude. Malheureusement, c'est un système d'équations trop complexe pour pouvoir être utilisé seul de façon utile.

b) Trajectoire elliptique

Il a été montré qu'il existe une expression de r en fonction de θ qui satisfait le couple d'équations plus haut[3]. La démonstration dépasse de loin le cadre de ce cours et nous nous contenterons d'admettre que la fonction $r(\theta)$ suivante solutionne le couple (II-2.4/5) :

$$r = \frac{h^2}{\mu_A} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \tag{II-2.6}$$

où r est le rayon (m),
θ est l'angle formé avec le centre de l'astre et le point d'origine (degrés ou radians)
h est le moment angulaire (constant, m^2/s),
μ_A est le paramètre gravitationnel (constant, m^3/s^2),
et e est l'excentricité, valeur constante et sans dimension.

Nous nous armerons de patience et n'aborderons pas aujourd'hui la signification de l'excentricité e , qui croît avec l'énergie mécanique totale du corps étudié[4]. Nous intéressons ici au cas où $e < 1$. Nous sommes alors dans le cas d'une trajectoire elliptique :

3 Notons que d'un point de vue mathématique, cela n'a rien d'évident. Un système d'équations pour X(t) et Y(t) peut ne présenter aucune solution de la forme X(Y).

4 La signification du paramètre e et les cas où $e \geq 1$ seront étudiés dans le cours VI.

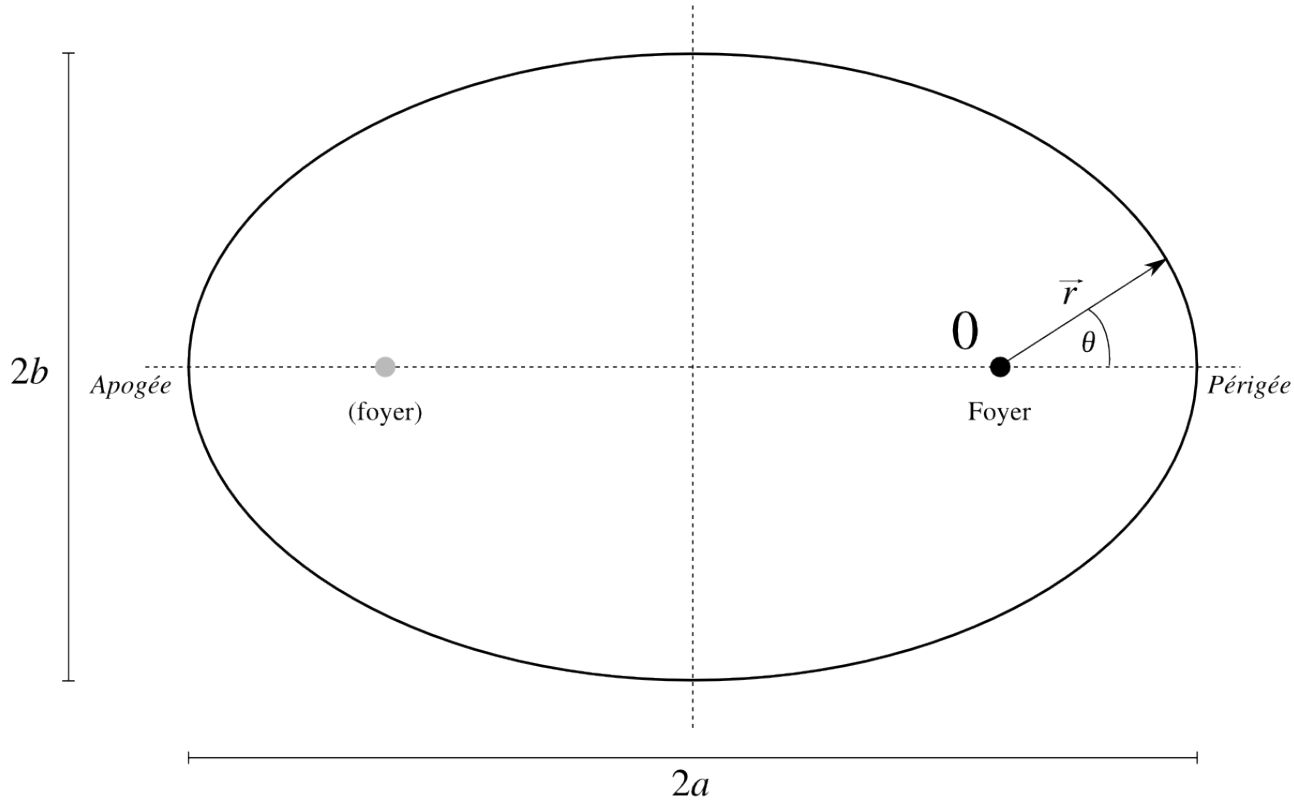


Figure 1.4
Géométrie d'une trajectoire elliptique

L'excentricité e indique alors le rapport entre les deux dimensions principales de l'ellipse :

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a} \qquad \text{(II-2.7)}$$

On montre que la caractéristique géométrique a de l'ellipse, nommée *demi-grand axe*, s'exprime simplement selon l'expression :

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} \qquad \text{(II-2.8)}$$

où a est une longueur (m).

Comme le rayon r et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ sont liés par la relation (II-2.5), il est possible d'exprimer la vitesse en fonction de la seule variable r. C'est l'objet de l'équation (II-2.9) ci-dessous, d'une utilité sans pareille pour décrire le mouvement d'un satellite :

$$v^2 = 2\,\mu_A \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2\,a}\right) \tag{II-2.9}$$

où v est la vitesse locale sur l'orbite elliptique (m/s) ;
μ_A est le paramètre gravitationnel de l'astre (m^3/s^2) ;
r est le rayon où se situe le corps (m) ;
et a est le demi-grand axe de l'ellipse (m).

On notera que la *seule* variable dans l'équation (II-2.9) est r : la vitesse varie donc en fonction de la distance séparant l'objet du foyer de l'ellipse. Le satellite en orbite elliptique est plus rapide à son périgée, et plus lent à son apogée. Il échange périodiquement énergie cinétique (avec la vitesse v) et énergie potentielle d'altitude (avec la distance r).

La vitesse qu'il faut impartir à un corps pour qu'il maintienne une orbite donnée est une information primordiale dans la conception et l'utilisation d'engins spatiaux. Elle ne dépend ni de la masse, ni des performances du véhicule.

On montre, enfin, que la période τ, temps nécessaire au satellite pour parcourir une orbite, est :

$$\begin{aligned} \tau &= 2\pi \frac{a^{3/2}}{R_A \sqrt{g_0}} \\ \tau &= 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_A}} \end{aligned} \tag{II-2.10}$$

où τ est mesuré en secondes.

Tous les corps que nous maintenons en orbite autour de la Terre ont une trajectoire elliptique, un des foyers étant le centre de gravité de la Terre[5]. Ces quelques relations nous permettent de décrire leurs trajectoires.

5 Rigoureusement, le foyer de l'ellipse est le centre de gravité des deux corps Terre et satellite. Le rapport des masses est tel qu'il est en pratique confondu avec celui de la Terre.

c) Orbite circulaire

Le cas de l'orbite circulaire survient lorsque $e = 0$. Le demi-grand axe a est alors égal à R_{orb}, et les équations (II-2.9) et (II-2.10) deviennent respectivement :

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{g_0 R_A^2}{R_{orb}}}$$

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{\mu_A}{R_{orb}}} \qquad \text{(II-2.11)}$$

où la vitesse v est constante et égale à V_{orb} (m/s)
et le rayon r est constant et a pour valeur R_{orb} (m) ;

$$\tau = 2\pi \frac{R_{orb}^{3/2}}{R_A \sqrt{g_0}}$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R_{orb}^3}{\mu_A}} \qquad \text{(II-2.12)}$$

où τ est mesuré en secondes.

On note parmi les orbites circulaires une grande partie des orbites polaires, ainsi que l'orbite géostationnaire, dont la période de rotation est confondue avec celle de la Terre.